

TEMA 1. NÚMEROS REALES

1. El número 365 que indica los días del año es un número muy curioso. Es el único número que es suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos y que además es suma de los cuadrados de los dos números siguientes. ¿Sabrías hallarlos?
2. Escribe como fracciones irreducibles los siguientes números decimales:
a) 13,176 b) -2,132132132... c) -42,31121212... d) 6,3141414...
3. Demuestra que es irracional el siguiente número:

$$N = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{15}} + \frac{1}{10^{21}} + \dots$$

4. Al realizar la medida de la altura de un niño de 92 cm se obtuvieron 90 cm. Al realizar la medida de la altura de una torre de 38 m se obtuvieron 37 m. Calcular:
a) El error absoluto de cada medida.
b) El relativo de cada medida.
c) Indicar cuál de las dos medidas es más precisa y justificar la respuesta.
5. Aproxima $\pi - e$
a) a las décimas por exceso y por defecto
b) a las milésimas por exceso y por defecto.
Estima una cota del error absoluto y relativo en cada caso.

6. Opera en notación científica:

a) $(3,6 \cdot 10^6) \cdot (4,25 \cdot 10^{-5})$

b) $(3,4 \cdot 10^{10}) : (6,8 \cdot 10^{77})$

7. Expresa en notación científica, en las unidades del sistema internacional, y determina el orden de magnitud de las siguientes cantidades:
a) Distancia Luna Tierra: 384000 km.
b) Distancia Tierra Sol: 150 millones de km.
c) Tamaño de un virus: 0,0000000017 m.
d) Peso de una bacteria: 0,00000000001 g.

8. Opera en notación científica:

a) $5,7 \cdot 10^{-3} + 4,81 \cdot 10^{-2} - 13,05 \cdot 10^{-4}$

b) $((5 \cdot 10^{-7}) : (4 \cdot 10^{-3}))^2$

9. Realiza las siguientes operaciones con números reales.

a) $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4 - \frac{5}{2}}}}$

b) $6,8 - 5,46 \cdot 1,3 =$

10. Realiza las siguientes operaciones con números reales.

a) $\left(\frac{6}{\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{5\pi}{2}\right)^3 : \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2$

b) $\frac{2^5 \cdot (-4)^3 \cdot 6^3}{9^2 \cdot 12^2 \cdot (-20)^2}$

11. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

12. Determina según los distintos valores de x, el valor de la expresión $E[x] = |x+2| + |2x|$ y comprueba los resultados dando a x los valores -3, -1 y 2.

13. Ordena de menor a mayor los siguientes números reales:

a) $\frac{9}{3,07}; \left| \frac{-504}{165} \right|; \frac{1}{0,33}; \sqrt{10}$ b) $\frac{3\pi}{4}; \sqrt{5}; \sqrt[4]{30}$

14. Calcula el centro y el radio de los siguientes entornos:

a) $(-\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$

b) $\left(-\frac{3}{4} - \sqrt{3}, -\frac{3}{4} + \sqrt{3}\right)$

c) $\left(4, \frac{11}{2}\right)$

d) $(-5,8 ; 0,2)$

15. Escribe como un único intervalo, y representa el resultado en la recta real:

a) $(-\infty, 3] \cup (-2, 5]$

b) $(-6, 12) \cap (0, +\infty)$

16. Escribe como un intervalo el conjunto de números reales x tales que verifican: $|2x-4| - |x| \leq 1$

17. Determina a qué intervalos abiertos corresponden los siguientes entornos:

a) De centro 2 y radio 3: $E(2,3)$

b) De centro -1 y radio 2: $E(-1,2)$

Halla los intervalos numéricos correspondientes a la unión e intersección de dichos intervalos.

18. Determina qué entornos se corresponden con los siguientes intervalos numéricos, determinando en cada caso, el centro y radio del entorno.

a) $(-7,5)$ b) $(-3,9)$

Calcula los intervalos unión e intersección de esos dos conjuntos de números.

19. Escribe como un único intervalo, y representa el resultado en la recta real:

a) $[-3,9] \cup [5,12)$ b) $(-\infty, 3] \cap (3,12)$

20. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real:

a) $|x| = 4$ b) $|x| > 4$ c) $|x| < 4$ d) $|x| \leq 4$

21. Calcula:

a) $([-5,3) \cap [0,5]) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

b) $((-\infty, -2) \cup (3, +\infty)) \cap ((-\infty, 1) \cup (2, 4))$

22. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x - 3| < \frac{1}{2}$ b) $\left|x + \frac{5}{2}\right| \geq 3$ c) $|1 - x| < 2$

23. Simplifica las siguientes expresiones hasta dejarlas en la forma $a^{n/m}$:

a) $\frac{(\sqrt{11^{1/5}} \sqrt{11^{5/2}})^6}{\sqrt{11^{1/2}}}$ b) $\frac{(2^{3/5} \cdot 3^{3/5} \cdot 5^{3/5})^{2/3}}{(2^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/2})^3}$

24. Escribe cuatro números comprendidos entre los números:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt{3}$

25. Racionaliza y simplifica el resultado:

a) $\frac{10}{\sqrt{10} - \sqrt{7}} - \frac{7}{\sqrt{10} + \sqrt{7}}$ b) $\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

26. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{9}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

27. Encuentra el valor de a para que:

$$\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{a}$$

28. Expresa como una única raíz, simplifica y saca factores:

a) $\frac{4\sqrt{x^3} \cdot (\sqrt[6]{x^7})^2}{\sqrt[3]{x^5}}$ b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{32}}{\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[6]{8}}}$

29. Halla dos números racionales tales que

a) $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ b) $\sqrt{10 - 5\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

30. Demuestra las siguientes identidades

a) $\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{3} - 1$ b) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

31. Demuestra las siguientes identidades

a) $\sqrt{7 - \sqrt{48}} = 2 - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

32. Racionaliza y simplifica el resultado:

a) $\frac{3 + \sqrt{8}}{3 - \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$ b) $\frac{4b^3}{\sqrt[7]{b^2}} + \frac{5b^4}{\sqrt[7]{b^9}}$

33. Utiliza la igualdad $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ para racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ b) $\frac{3 - \sqrt[3]{3}}{3 + \sqrt[3]{3}}$

34. ¿Existe algún valor entero de x tal que $\sqrt{5 - \sqrt{x}} + \sqrt{5 + \sqrt{x}}$ sea entero?

35. Opera, racionaliza y simplifica:

$$\text{a) } \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

36. Racionaliza y simplifica:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{27}-3\sqrt{32}-\sqrt{12}+13\sqrt{2}}$$

37. Dada la potencia:

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{20}$$

se pide:

a) Calcula el término en el que x, aparece con exponente 28.

b) ¿Existe algún término del desarrollo que sea independiente (es decir numérico)? Si es así, ¿cuál es su valor?

38. Resuelve las ecuaciones:

$$\text{a) } \binom{23}{4} = \binom{23}{2x-1} \quad \text{b) } \binom{100}{75-2x} = \binom{100}{3x}$$

39. El tercer y cuarto término del desarrollo de la potencia: $(1+x)^n$ valen 90 y 270 respectivamente. Halla x y n para que eso ocurra.

40. Resuelve la ecuación:

$$30 \cdot \binom{x}{5} + 24 \cdot \binom{x}{4} = 21 \cdot \binom{x}{3} - 6 \cdot \binom{x}{2}$$

41. Sabiendo que el desarrollo de: $(x-y)^8$ es igual a la unidad y que su término central es 1120, calcula qué valores deben tomar x e y para que eso ocurra.

42. ¿Cuánto vale la suma de todos los números de la fila octava del triángulo de Tartaglia?

43. Los coeficientes de las potencias de x en el quinto y séptimo término del desarrollo de: $(1+2x)^n$ son, respectivamente, 1120 y 1792. Determina n, para que eso ocurra.

44. En el desarrollo de la potencia: $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$

Halla:

a) La expresión del quinto término del desarrollo.

b) El término central.

45. Considera el desarrollo de la potencia:

$$(x^2 - 5y^3)^{12}$$

a) Calcula el coeficiente numérico del término octavo del desarrollo.

b) ¿Cuál es la expresión del término central?

46. Efectúa el desarrollo, simplificando todo lo posible el resultado, de las siguientes potencias:

$$a) (\sqrt{x} + \sqrt{y})^6 \quad b) \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^5$$

47. Determina n , x e y , sabiendo que los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo de: $(x + y)^n$ valen, respectivamente, 80, 80 y 40.

48. Sean a y b dos números reales. Prueba cada una de las igualdades siguientes:

$$a) \log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad b) \log(a^2 - b^2) = \log(ab) + \log\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

49. Resuelve razonadamente las siguientes cuestiones:

$$a) \text{¿Es cierta la igualdad } \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0?$$

$$b) \text{Despeja } x \text{ en la igualdad: } \log x + \log a = \log(x + a)$$

50. Conociendo el valor de $\log_5 2 = 0,43$ y de $\log 2 = 0,3$, calcula el valor aproximado de

$$a) \frac{\log 800}{8} \quad b) \log_5 64\sqrt{2}$$

51. Sin utilizar la calculadora, halla el valor de los siguientes logaritmos:

$$a) \log_3 81 \quad b) \log_3 (1/243) \quad c) \log_9 3 \quad d) \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27}$$

52. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

$$a) \text{¿Qué relación existe entre los números } A \text{ y } B \text{ si se verifica } \log A + \log B = 0?$$

$$b) \text{¿Qué relación existe entre los números } A \text{ y } B \text{ si se verifica } \log B = \log A + 5?$$

$$c) \text{¿Qué relación existe entre los logaritmos decimales de } 2,5 \text{ y de } 2.500?$$

53. Calcula la parte entera de los siguientes logaritmos (no utilizar la calculadora)

$$a) \log 26 \quad b) \log 5.27 \quad c) \log 512$$

54. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

$$a) \log(A) = \log(x) + \log(y) - \log(z) \quad c) \log(C) = 2\log(x) - \log(y) + 3$$

$$b) \log(B) = 2\log(x) - 3\log(y) + 5\log(z) \quad d) \log(D) = 1 - \log(x) + 3\log(z)$$

55. Escribe como un único logaritmo las siguientes expresiones:

$$a) \log_3 a + 5\log_3 a^2 \quad b) 2\log_5 a - 5\log_5 \sqrt{a} \quad c) 3\log_6 a + 2\log_6 \sqrt{a} - 4\log_6 \sqrt[3]{a}$$

56. Calcula:

$$a) \text{El valor de la suma } S(n) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^n, \text{ sabiendo que } \log 2 = 0,301, \text{ y el valor que se obtiene cuando } n = 50.$$

$$b) \text{Determina ahora el valor de la suma } S(n) = \log_a a + \log_a a^2 + \log_a a^3 + \dots + \log_a a^n.$$

57. Sabiendo que $\log 2 = 0,301$ y $\log 5 = 0,699$, calcula:

$$a) \log 2,5 \quad b) \log 0,2 \quad c) \log 0,5 \quad d) \log 25 \quad e) \log 4$$

58. Simplifica al máximo

$$a) 3 \log_3 18^4 - \log_3 54^2 \quad b) \log_8 a^4 - \log_8 8^a$$